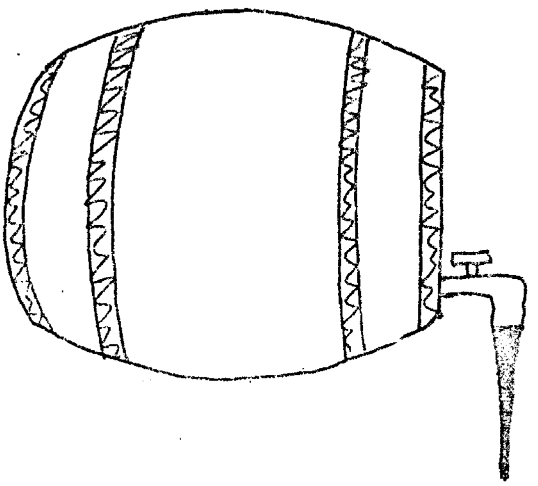
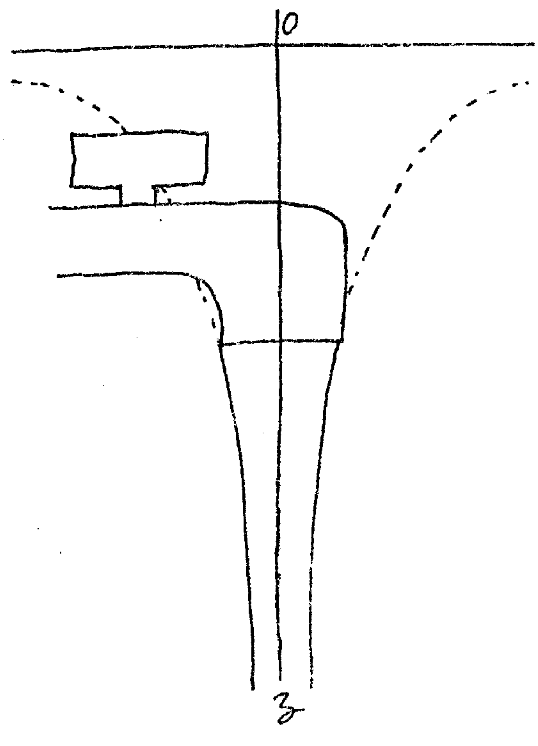
TROIS RECETTES POUR LE NOUVEL AN

En guise d'étrennes, et dans la joyeuse ambiance des fêtes de fin d'année, nous adressons à nos copains du GEM trois recettes pour faire de jolies fonctions avec du vin. L'avantage de ces recettes, c'est que si vous trouvez qu'elles reviennent trop cher, ou si vous avez mal au foie pour avoir déjà trop bu, vous pouvez aussi les faire à l'eau : le goût sera différent, mais pas les fonctions.

Première Recette





Lorsque le vin coule par un robinet à orifice circulaire de rayon r, avec une vitesse initiale v_0, le jet prend la forme d'une figure de révolution. Trouver l'équation du méridien de cette figure.

Soit Oz un axe vertical descendant, coïncidant avec l'axe de révolution du jet. Toute particule de vin tombe comme si elle était seule. Vous vous souvenez, la loi de la chute des corps : $z = \frac{1}{2} g t^2$, $v = gt = \sqrt{2gz}$. Ces équations décrivent la chute de la particule quand, à l'instant $t = 0$, elle est en $z = 0$, avec une vitesse $v = 0$.

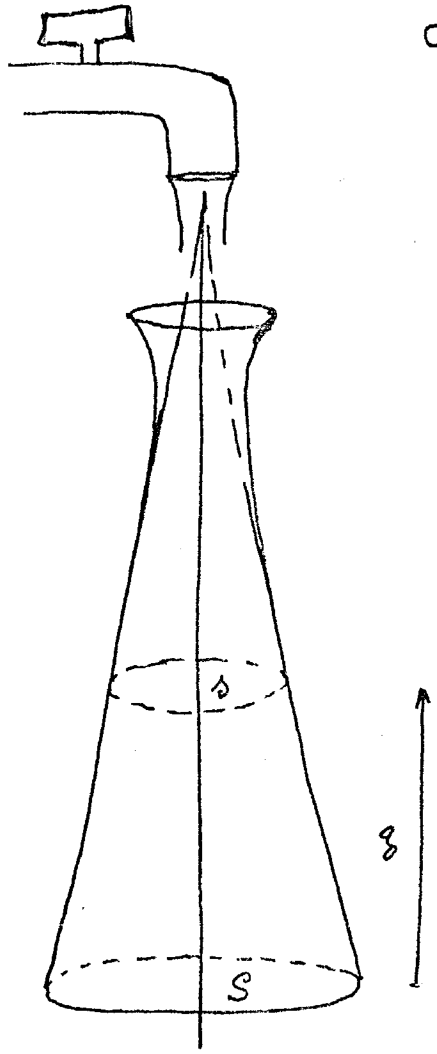
Puisque pour nous, à l'orifice, $v = v_0$, l'origine des z est située, au dessus de l'orifice, à une hauteur z_0 donnée par $v_0 = \sqrt{2gz_0}$. La vitesse du jet à la hauteur z vaut $\sqrt{2gz}$. Si $\rho(z)$ désigne le rayon du jet à cette même hauteur, le débit du jet y vaut $\pi \rho^2 \sqrt{2gz}$ (= aire de la section du jet fois sa vitesse dans cette section.)

Mais le débit est le même à toutes les hauteurs : le vin ne s'accumule nulle part, la Providence y veille. Donc le débit est partout égal au débit à l'orifice : $\pi \rho^2 \sqrt{2gz} = \pi r^2 v_0$.

Donc

$$\boxed{z = \frac{a}{\rho^4}}$$

où a est une constante qui vaut $r^2 v_0 / 2g$.



Deuxième Recette

Supposons maintenant qu'on remplisse à débit constant un de ces jolis carafons italiens que vous connaissez bien. Selon quelle loi temporelle le niveau du vin va-t-il monter ?

Soit R le rayon de la base du flacon. On supposera qu'il est conique, et donc notre analyse ne tiendra pas compte de l'évasement du goulot. Soit H la hauteur du cône, et soit d_0 (par exemple en litres/minute) le débit constant. Soit s l'aire de la section horizontale du cône à la hauteur z. On a

$$s = \pi R^2 \frac{(H-z)^2}{H^2}.$$

La "loi élémentaire" de remplissage est $s\Delta z = d_0 \Delta t$. D'où

$$\pi R^2 \frac{(H-z)^2}{H^2} \frac{dz}{dt} = d_0.$$

Posons pour simplifier : $\zeta = H - z$ = distance de la surface libre du vin au sommet du cône. On a

$$-\zeta^2 \frac{d\zeta}{dt} = a = \frac{d_0 H^2}{\pi R^2} > 0.$$

D'où, en choisissant $\zeta(0) = H$ (le flacon est entièrement vide quand on commence le remplissage en $t=0$)

$$\boxed{\zeta^3 = H^3 - 3at}$$

Une petite vérification rassurante : le cône est rempli jusqu'au sommet (il est vivement conseillé aux débutants de ne pas pratiquer ce contrôle par voie expérimentale) quand $\zeta = 0$, c'est-à-dire au temps t^* donné par

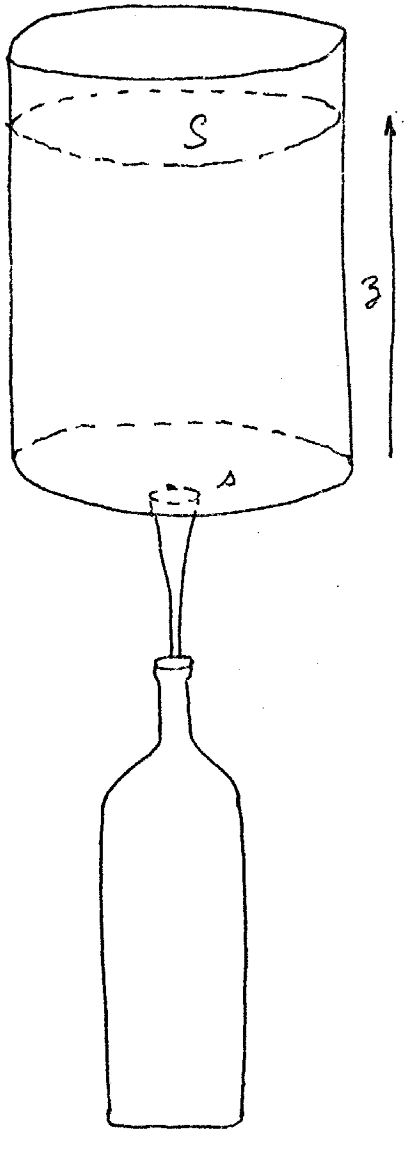
$$t^* = \frac{H^3}{3a} = \frac{\pi R^2 H}{3} \Big/ d_0 ,$$

ce qui n'étonnera que ceux qui ont oublié la formule du volume du ~~cube~~ cône.

Les profanes doivent à tout prix s'arrêter au sommet. Mais puisque vous êtes mathématicien diplômé, vous pouvez remplir plus haut. Faites quand même attention, car lors du passage au sommet, ça va gicler : la vitesse de montée du niveau passe à l'infini.

Troisième Recette

Combien de temps faut-il pour vider le tonneau, quand on maintient le robinet grand ouvert ? Pour éviter les complications dues à la forme du tonneau, prenons plutôt un fût cylindrique vertical de section S percé à la base d'un orifice circulaire de section s. Soit z la hauteur, au dessus de la base, de la surface libre du vin, et z_0 la hauteur à l'instant $t=0$.



L'expérience prouve que la vitesse d'échappement à l'orifice est $\sqrt{2gz}$, c'est-à-dire exactement la vitesse d'un corps tombant de la hauteur z. Pour le vérifier, dirigez le jet de vin vers le haut en branchant sur l'orifice un tuyau souple de section s, et vous verrez le jet remonter jusqu'à z (ou à peu près car il y a toujours un peu de pertes par frottement).

Donc le débit vaut $\sqrt{2gz}\,.\,s$ et par conséquent le volume de vin restant à l'instant t vaut

$$Sz = Sz_0 - \int_0^t s\sqrt{2gz(\tau)}\,d\tau.$$

D'où
$$S\frac{dz}{dt} = -s\sqrt{2g}\,z^{1/2}$$
ou encore
$$z^{-1/2}dz = -a\,dt, \text{ avec } a = \frac{s\sqrt{2g}}{S} > 0.$$
Par intégration:
$$2z^{1/2} - 2z_0^{1/2} = -at$$
ou encore
$$\boxed{z(t) = \left(z_0^{1/2} - \frac{at}{2}\right)^2}$$

En $t=0$, $z=z_0$, c'est rassurant. Le fût est vide en t^* donné par

$$t^* = \frac{2}{a} z_0^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{S}{s}\,z_0^{1/2}.$$

Et voici, pour terminer, le MIRACLE MATHEMATIQUE, l'offrande du GEM à ses membres pour le jour des rois : lorsqu'en t^* votre fût sera vide (et que vos bouteilles seront pleines), il vous suffit d'attendre encore un peu. Suivez la fonction $z(t)$: le fût se remplit tout seul, à la vitesse même à laquelle il s'est vidé...

Hourrah ! A la bonne vôtre et au grand plaisir de vous revoir bientôt.

Christine

Rosane Nicolas.

Christiane.