

Qu'est-ce qu'un bon manuel de mathématiques ?

Thérèse GILBERT, Benoît JADIN, Nicolas ROUCHE,

Le Ministère de l'Éducation a décidé de favoriser l'usage des manuels dans les écoles. Il s'efforce aussi, en mettant en place une procédure d'agrément, d'aiguiller les enseignants vers des manuels de qualité. Qui ne souscrirait à ces deux objectifs ? En effet, un bon manuel est, parmi d'autres, un instrument de travail utile, une référence sûre et stable, partagée par les enseignants et les élèves.

Dans un communiqué de presse du 13 janvier 2006, le Ministère a communiqué ce qui suit : "Le Gouvernement [de la Communauté française] entend garantir la qualité des manuels qui seront mis à disposition des écoles. Ils devront participer à la réalisation des objectifs de qualité, d'efficacité et d'équité poursuivis et assignés à notre système scolaire."

Nous examinons ci-après les manuels de mathématiques. Ceux qui sont disponibles aujourd'hui sur le marché belge sont de qualités diverses. Certains sont bons, d'autres, sans doute pour des raisons commerciales, favorisent la facilité d'usage par les enseignants et les élèves, au détriment de la profondeur des apprentissages. Dans ces conditions, il nous semble utile d'expliquer ce que l'on peut entendre par *un manuel de qualité*. Dans la première partie, nous proposons quelques critères. Dans la deuxième partie, nous illustrons ceux-ci par un certain nombre d'exemples et de contre-exemples¹.

Quelques critères de qualité

Favoriser le développement de la pensée autonome. Un manuel doit proposer des questions, des problèmes, d'un niveau bien adapté. Il s'agit de provoquer la réflexion personnelle des élèves : des questions trop faciles ne mobilisent pas l'intelligence, des questions trop difficiles découragent. L'idée est d'amener les élèves à une pensée autonome. L'école doit les aider à se passer progressivement du professeur.

¹Les auteurs du présent document tiennent à souligner qu'ils ne pensent détenir aucune vérité définitive. Ils souhaitent contribuer à un débat nécessaire sur la qualité et l'efficacité des manuels, en espérant que d'autres les rejoindront sur ce terrain et n'hésiteront pas à les contredire s'ils l'estiment opportun. Ils sont conscients qu'en critiquant des manuels, ils prennent le risque d'indisposer certains auteurs. Prendre ce risque était inévitable. Ils ont maintenu le débat au niveau d'arguments étayés autant que possible. Par ailleurs, ils n'ont critiqué aucun manuel dans son ensemble, et n'ont donné des exemples que pour illustrer les critères proposés. Le progrès de l'enseignement est, en de telles matières, le but prioritaire. Il serait naïf de croire qu'on puisse le poursuivre en évitant toute polémique.

Mais parmi les manuels dont les chapitres commencent par une situation intéressante, il faut refuser ceux qui poursuivent en oubliant celle-ci et se contentent d'imposer la théorie pour déboucher ensuite sur des exercices de routine sans souci du sens. Au contraire, les images mentales et l'argumentation développées en début de chapitre doivent être sollicitées dans les applications.

Favoriser le débat, les preuves. Les questions posées doivent favoriser le débat, l'argumentation, la recherche de preuves. Il s'agit, bien entendu, d'arguments adaptés à chaque âge. Les manuels doivent garder la trace des argumentations. Pour les plus jeunes, celles-ci peuvent parfois être exprimées sous la forme d'un dessin ou d'un exemple bien choisi.

Éviter les erreurs et les imprécisions. Un manuel doit être fiable. Il doit distinguer clairement entre définitions, propositions démontrées ou admises, conventions, etc. Il doit éviter les imprécisions, les erreurs, les absurdités, les contradictions, et signaler les abus de langage et de notation, parfois bien utiles.

L'usage indispensable du français. Dans un débat oral, chacun s'exprime avec les moyens qui sont les siens. Mais les arguments et les preuves, que ce soit dans un manuel ou dans les mises au point collectives en classe, doivent s'exprimer en français, à travers des phrases complètes, dans lesquelles les conjonctions, les prépositions et les adverbes expriment les relations logiques. Des suites de symboles mathématiques isolés n'ont par eux-mêmes pas de sens. Les élèves doivent apprendre, au fil des années d'école, à construire des phrases où ils argumentent, décrivent un procédé ou élaborent une définition. C'est évidemment là un long apprentissage, et donc on ne peut pas attendre des enfants les plus jeunes un langage très évolué.

Une pratique assez répandue consiste à demander aux élèves de remplir les blancs laissés dans des phrases lacunaires. L'objection majeure est qu'en faisant cela, on les empêche d'accéder à la pensée adulte, qui passe par le discours. Bien entendu, ces textes lacunaires font gagner du temps à l'enseignant (qui ne doit plus tout écrire au tableau) et aux élèves (qui ne doivent pas recopier). Ils contribuent sans doute à assurer la tranquillité dans les classes difficiles et donnent aux élèves le sentiment d'avancer. Ces avantages pratiques ne compensent pas leur médiocrité pédagogique. Ajoutons qu'ils ont pour effet pervers d'empêcher toute réutilisation du manuel, ce qui est clairement un objectif commercial.

Un équilibre entre le sens et les automatismes. Les manuels doivent maintenir un équilibre entre la construction du sens, les intuitions, les images et les idées d'une part, et les automatismes utiles de l'autre. Automatiser des parts de plus en plus importantes de sa pensée est une condition de son efficacité. Mais réduire les mathématiques à des routines revient à les dénaturer.

Une mise en page claire. Certains manuels compliquent les mises en page en multipliant les encadrés, les plages de couleur et les types de polices au point que le lecteur ne sait plus sur quoi on veut attirer son attention. La clarté s'obtient au prix d'une certaine sobriété.

Une culture mathématique intégrée. On demande à l'école de développer chez les élèves une culture mathématique qui forme un tout cohérent, un système de pensée qui fonctionne bien. Ceci veut dire que les divers chapitres des mathématiques ne peuvent pas être simplement juxtaposés. Il faut mettre en évidence les liens essentiels qu'ils ont entre eux, respecter les enchaînements naturels des questions.

Des manuels bien structurés. Ceci implique que les manuels aient une structure cohérente et bien mise en évidence et en particulier qu'ils comportent des chapitres de théorie, points d'appui pour la suite.

Les choix qui ont présidé l'ordre des chapitres doivent être clairs. À la fin d'une année, l'élève doit pouvoir saisir, par exemple en parcourant la table des matières de son manuel, les grands axes de son apprentissage.

Des liens avec l'art et l'histoire. Les mathématiques ont des origines historiques qui peuvent aider à comprendre ce qu'elles sont, à quels besoins elles répondent et quelles difficultés il a fallu vaincre pour les élaborer. Les mathématiques ont aussi des liens avec tout ce qui, dans la nature et l'art, manifeste des régularités, des structures. Il est bon que les manuels exploitent ces contextes culturels, non comme des enjolivements, mais comme des matières de fond.

Les manuels d'année en année. Cette culture qui forme un tout cohérent s'acquiert d'année en année : très peu de choses apprises à un moment donné peuvent être simplement oubliées lorsqu'on passe à la suite. Les notions et les théories se généralisent et s'enrichissent. Ce qui a été appris avant continue à fonctionner soit techniquement, soit intuitivement, dans ce qui vient après.

D'où l'intérêt qu'il y aurait à produire des manuels couvrant plusieurs années. Ou au moins à inciter les élèves à se reporter aux manuels des années antérieures lorsqu'ils en ressentent le besoin.

En conclusion. Tous comptes faits, il semble difficile de demander à une commission d'agrément non seulement d'évaluer les manuels selon des critères tels que ceux proposés ci-dessus, mais encore d'en rejeter certains sur une telle base. Une façon d'élever le niveau moyen des manuels serait que des personnes compétentes, indépendantes de toute attache administrative et n'entretenant aucun lien avec les éditeurs, publient régulièrement des analyses critiques de manuels. La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française a fait cela parfois dans le passé. Pourquoi ne le ferait-elle pas dans l'avenir ?

Exemples et contre-exemples

Illustrons maintenant par quelques extraits de manuels certains des critères évoqués ci-dessus. Notre but est de préciser au mieux notre pensée. Il ne s'agit donc, dans aucun cas, de critiquer un ouvrage dans son ensemble.

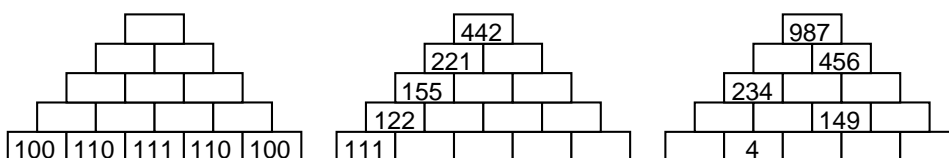
Favoriser le développement de la pensée autonome

Commençons par illustrer ce critère en examinant quelques problèmes ayant comme objectifs de s'exercer aux quatre opérations fondamentales en début de cinquième primaire.

Manuel [1]

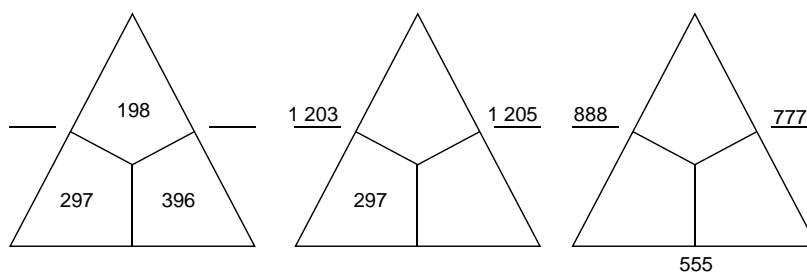
Mur de nombres

Dessine ces murs de nombres dans ton cahier et recherche les nombres manquants.
Règle : sur chaque pierre, on écrit la somme des nombres écrits sur les deux pierres inférieures.



Arithmogone

Dessine ces arithmogones dans ton cahier et recherche les nombres manquants.
Règle : chaque nombre extérieur est égal à la somme des deux nombres intérieurs qui se touchent.



Croix de multiplication

Dessine ces croix dans ton cahier et recherche les nombres manquants.

X	300	80	6
40			
8			

X	600	50
90		630
		150

X			8
20		800	
2	800		

Au lieu de proposer des séries de calculs, les auteurs ont choisi de vérifier le savoir-faire des élèves par des jeux de raisonnement. L'addition et la multiplication interviennent directement, la soustraction et la division interviennent comme addition et multiplication lacunaires.

Les élèves doivent découvrir des stratégies leur permettant de compléter les murs,

arithmogones et croix proposées. Remarquons que, pour la réalisation du troisième arithmogone, une réelle réflexion est nécessaire.

Continuons en comparant trois introductions à la division d'un nombre par une fraction au premier degré du secondaire.

Manuel [2]

1° Recopier et compléter : $\dots \times \frac{7}{3} = \frac{28}{3}$, d'où $\frac{28}{3} : \frac{7}{3} = \dots$.
 $\dots \times \frac{7}{3} = \frac{35}{27}$, d'où $\frac{35}{27} : \frac{7}{3} = \dots = \dots$; $\dots \times \frac{7}{3} = -\frac{7}{12}$, d'où $-\frac{7}{12} : \frac{7}{3} = \dots = \dots$.

2° Effectuer les trois calculs suivants (ne pas oublier de simplifier s'il y a lieu) :
 $\frac{28}{3} \times \frac{3}{7}$; $\frac{35}{27} \times \frac{3}{7}$; $-\frac{7}{12} \times \frac{3}{7}$.

3° En examinant les résultats obtenus dans les deux premières questions, on peut énoncer la règle suivante (à compléter) :
Diviser un nombre par $\frac{7}{3}$ revient à multiplier ce nombre par \dots .

Il n'y pas de problème véritable. L'élève doit faire pas à pas ce qu'on lui demande. La règle n'est pas réellement justifiée : elle se base sur une constatation. Dans la théorie qui suit, l'énoncé de la règle est donné sans justification. Il est suivi de deux exemples.

Manuel [3]

a) Complète les égalités suivantes.

$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{7} \cdot \underline{\hspace{1cm}}}{\frac{2}{3} \cdot \underline{\hspace{1cm}}} = \frac{\frac{5}{7} \cdot \underline{\hspace{1cm}}}{1} = \frac{5}{7} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$.

$\frac{3}{4} : \frac{7}{11} = \dots\dots\dots$

$\frac{2}{5} : \frac{-3}{7} = \dots\dots\dots$

$\frac{4}{9} : 5 = \frac{\frac{4}{9}}{5} = \dots\dots\dots$

$7 : \frac{5}{3} = \frac{7}{\frac{5}{3}} = \dots\dots\dots$

Contrairement au manuel précédent, l'élève a la possibilité de se persuader du bien fondé de la règle qu'il devra appliquer. L'exemple qu'il doit compléter lui donne en effet l'idée d'une preuve générale de cette règle. Par contre, il n'a pas le moyen de l'élaborer lui-même. Il est guidé vers la solution.

En outre, aucun sens n'est donné à la division par une fraction. Dans la théorie, la règle est énoncée, suivie de quatre exemples. Aucune justification n'est reprise.

Alternative (inspirée de deux autres manuels)

1° a) On veut répartir 60 litres de vin dans des bouteilles de 3 litres. Combien de bouteilles faudra-t-il ? Écris le calcul correspondant à ce problème.

b) Si on veut maintenant répartir ces 60 litres dans des bouteilles de $\frac{1}{2}$ litre, combien de bouteilles faudra-t-il ? Écris le calcul correspondant à ce problème.

c) Même question si ce sont des bouteilles de $\frac{1}{4}$ de litre ou de $\frac{3}{4}$ de litre.

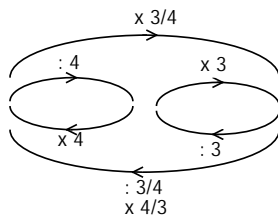
d) On veut couper des morceaux de tissu de $\frac{1}{5}$ m de long dans une grande pièce de 12 m de long. Combien de pièces pourrons-nous en obtenir ? Et si les morceaux ont $\frac{3}{5}$ m de long ?

2° Choisis un nombre. Multiplie-le par $\frac{3}{4}$.

Indique à ton voisin, sous forme de fraction irréductible, le résultat que tu as obtenu et demande-lui de retrouver le nombre que tu as choisi au départ. Fais de même avec le nombre qu'il te donne.

Ces deux situations, outre le fait qu'elles posent de vraies questions à l'élève, permettent de comprendre la règle de division par une fraction de deux manières.

La première utilise la division contenance, indispensable pour donner du sens à une telle division. La deuxième se base sur la division comme opération inverse de la multiplication et sur la décomposition d'une fraction (opérateur) en deux opérateurs plus faciles à inverser : prendre les $\frac{3}{4}$ d'un nombre consiste à le diviser par 4 puis multiplier par 3 le résultat, donc diviser par cette fraction consiste à diviser par 3 puis multiplier par 4.



Ces situations devraient donner lieu à une synthèse théorique reprenant non seulement la règle mais ses justifications. Remarquons qu'il existe d'autres manières, également exploitables, de justifier cette règle.

Favoriser le débat, les preuves.

Illustrons ce critère en examinant trois introductions à la somme des premiers nombres impairs au premier degré du secondaire. Regardons ce qu'en dit le programme de l'enseignement catholique [4].

“Les problèmes de dénombrement qui portent sur les régularités dans des suites de nombres ou de figures sont une source d'activités stimulantes pour le raisonnement : les configurations (de nombres ou de figures) constituent un champ expérimental qui se prête à l'observation, à la généralisation et à la vérification. (...)

On utilisera l'écriture littérale d'un nombre pair, impair, de deux nombres consécutifs, (...) pour exprimer quelques phénomènes numériques et les démontrer par une méthode algébrique.

La démonstration sera motivée aux yeux des élèves par l'analyse d'exemples, par l'absence apparente de contre-exemple, par la conjecture d'une loi, par la vérification d'un énoncé.

Exemples : (...) la somme des a premiers nombres impairs vaut a^2 , ...”

Manuel [5]

SOMME DES n PREMIERS NOMBRES NATURELS IMPAIRS						
Complète la série suivante en notant le nombre total de disques présents dans chaque représentation :						
Nombre de termes	1	2	3	4	5	6
Représentation graphique		● ●	● ● ●	● ● ● ●	● ● ● ● ●	
	○	○ ●	○ ○ ●	○ ○ ○ ●	○ ○ ○ ○ ●	
Somme des n premiers nombres naturels impairs	

On remarque que la somme des n premiers nombres naturels impairs n'est autre que C_n , le n^e nombre carré.

$1 + 3 =$
$1 + 3 + 5 =$
$1 + 3 + 5 + 7 =$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 =$
$1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) =$

Si n est le nombre de termes, alors la somme des n premiers nombres naturels impairs est

Le nombre de termes de la somme est égal à la moitié du nombre pair qui suit le dernier nombre de la somme (n).

Si $2n+1$ est le dernier terme de la somme, alors la somme des n premiers nombres naturels impairs est

Les élèves doivent compléter le tableau avec des nombres. Ensuite on leur dit ce qu'ils auraient pu découvrir. On leur demande enfin d'écrire le carré de n sous sa forme algébrique. Ils ne doivent donc se poser aucune question, n'ont l'occasion ni de conjecturer, ni d'argumenter, ni d'utiliser eux-mêmes l'écriture littérale pour décrire un phénomène.

Remarquons que la dernière phrase que l'on demande de compléter n'a pas de sens.

En effet, si $2n + 1$ est le dernier terme de la somme, c'est qu'il s'agit de la somme des $(n + 1)$ premiers nombres naturels impairs. Dans ces conditions, on voit mal ce que doit répondre l'élève : n^2 ou $(n + 1)^2$?

Manuel [6]

Les nombres carrés

- a) Dessine le premier gnomon. Quel nombre représente-t-il ?
- b) Le long des côtés supérieur et droit, c'est-à-dire les côtés coloriés, tu lui accolés le deuxième gnomon.



La figure obtenue est particulière. Quelle forme a-t-elle ? Quel est le nombre qu'elle représente ?

- c) Le long des côtés supérieur et droit de cette figure tu accolés le troisième gnomon. La figure obtenue est particulière. Quelle forme a-t-elle ? Quel est le nombre qu'elle représente ?
- d) Tu continues d'accoler les gnomons suivants, jusqu'au cinquième de la même manière.

Quelle surprise ! Les figures obtenues ont chaque fois la même forme. Quels sont les nombres successifs obtenus ?

- e) Quel nombre obtiendrais-tu en accolant le dixième gnomon à la figure formée des neuf premiers ? Il est la somme des nombres représentés par les dix premiers gnomons.
- f) La figure formée des n premiers gnomons représente un nombre. Lequel ? Il est la somme des nombres représentés par les n premiers gnomons. Exprime ce résultat par une formule.
- g) Quel raisonnement tiendrais-tu pour convaincre quelqu'un qui aurait des hésitations ?

Signalons que les nombres impairs ont été introduits et représentés par des gnomons juste avant cette séquence.

On le voit, le problème est complètement décomposé. On dit à l'élève ce qu'il doit faire exactement. On ne lui laisse aucune possibilité d'exercer son imagination. Il doit suivre docilement les consignes et répondre aux questions.

Mais contrairement à la séquence précédente, l'objectif de celle-ci est l'argumentation : la dernière question (g) le montre clairement. La synthèse est longue et explicite au niveau des arguments et comprend deux preuves (géométrique et algébrique) de la formule. Il est clair qu'un des objectifs du manuel est le développement de la rigueur. Les exercices sont variés : application, modélisation, mais aussi problèmes de recherche du même type, où il faut découvrir une formule (et il y a plusieurs façons d'y arriver), ou bien où il faut démontrer une identité algébrique donnée. Le développement de l'imagination et des intuitions est donc un objectif qui apparaît dans les exercices.

Manuel [7]

Etudier la suite	1
	1 + 3
	1 + 3 + 5
	1 + 3 + 5 + 7

en calculant et en dessinant.

Ce manuel laisse beaucoup de liberté au professeur et aux élèves : le problème est donné a priori sans piste. Le professeur est donc libre de susciter l'inventivité des élèves, qui seront amenés à conjecturer, à choisir une représentation adéquate. La solution comprend la piste classique (géométrique). La théorie ne reprend pas l'égalité visée et sa justification. Les exercices sont du type "applications intelligentes" et recherches de nouvelles formules.

Éviter les erreurs et les imprécisions

Les encadrés suivants sont extraits des manuels [8] et [9]. Les deux premiers sont issus d'un livre dont l'objectif apparent est de servir d'aide-mémoire aux élèves de deuxième année du secondaire. Le dernier est issu du livre de l'élève de première secondaire.

NOMBRE RATIONNEL

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers et dont **l'écriture décimale est illimitée périodique**.

(...)

Quel est le statut de la première phrase ? La première partie devrait être une définition, alors que la deuxième partie est une proposition (qu'il faudrait démontrer). Est-ce clair pour l'élève ? Et comment doit-on interpréter le fait que certaines parties de la phrase sont en caractères gras ?

TRANSFORMATIONS : INVARIANTS

Les transformations du plan conservent :

- **l'alignement des points,**
- **l'amplitude des angles,**
- **les longueurs,**
- **le parallélisme.**

Il en découle que ces transformations du plan conservent aussi :

- la perpendicularité,
- l'aire et la forme d'une figure,
- le milieu d'un segment.

(...)

Que faut-il comprendre par "les transformations" ? Toutes les transformations du plan ? Alors l'affirmation est fautive. Sans doute faut-il comprendre "toutes les transformations que l'on étudie cette année", c'est-à-dire les isométries ? Il faudrait que les auteurs précisent de quelles transformations ils parlent.

En outre ce paragraphe montre le caractère trop réduit de l'étude des invariants, qui ne peut avoir de sens que si elle permet de caractériser les isométries en les contrastant à d'autres transformations "plus déformantes".

Il est clair que ce manuel ne peut servir à un élève rencontrant d'autres types de transformations... Il ne peut donc être un manuel de référence pour cette matière.

NOTION

1. Classement des solides

Un **polyèdre** est un solide qui a toutes ses faces planes.

Un **polyèdre régulier** est un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers de même mesure.

Un **non-polyèdre** est un solide dont les faces sont limitées par des courbes.

(...)

Le concept de polyèdre régulier tel que défini ci-dessus n'est pas conforme au concept classique de polyèdre régulier et entre en contradiction avec le fait, écrit ailleurs dans le même livre, qu'il y a exactement cinq polyèdres réguliers.

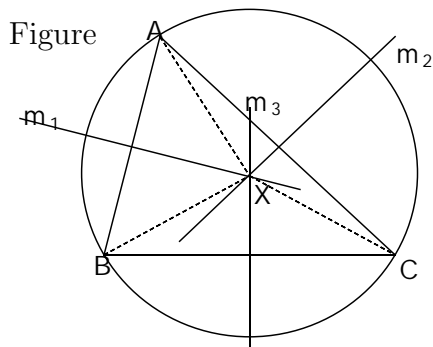
Le concept de non-polyèdre tel que défini ci-dessus ne correspond pas à celui de solide non polyèdre. Il existerait donc pour les auteurs les solides polyèdres, les solides "non-polyèdres" et d'autres solides encore, ni polyèdres, ni non-polyèdres ...

L'usage indispensable du français

Commençons par illustrer ce critère en examinant une démonstration de la concourance des médiatrices d'un triangle au premier degré du secondaire.

Manuel [3]

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.



Données

ABC triangle quelconque

m_1 médiatrice de $[AB]$

m_2 médiatrice de $[AC]$

m_3 médiatrice de $[BC]$

Thèse

m_1, m_2 et m_3 se coupent en X .

Démonstration

m_1 et m_2 se coupent en X .

$$\left. \begin{array}{l} X \in m_1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |XB| = |XA| \\ X \in m_2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |XA| = |XC| \end{array} \right\} \Rightarrow |XB| = |XC| \stackrel{(2)}{\Rightarrow} X \in m_3$$

Conclusion : m_1 et m_2 se coupent en X et $X \in m_3 \Rightarrow m_1, m_2$ et m_3 se coupent en X .

Remarque : X est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
le rayon de ce cercle vaut $|XA| = |XB| = |XC|$.

(1) car tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.

(2) car tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment.

Une première idée est que cette démonstration a l'avantage de présenter l'enchaînement de façon concise. Mais cela entraîne que les justifications sont rejetées en note.

Ensuite, les formules devraient être intégrées dans des phrases bien construites comprenant des "donc", "par conséquent", "puisque", ...

Par ailleurs, l'usage du signe \Rightarrow dans ce contexte est contestable. En effet, ce signe signifie en général "implique" et peut remplacer un "si ... alors...". Mais il est ici utilisé pour remplacer un "donc". La conclusion, par exemple, ne devrait pas être l'implication indiquée mais bien " m_1, m_2 et m_3 se coupent en X ".

En outre, l'usage de la ponctuation est déficient.

Remarquons enfin que le X intervenant dans la thèse n'a pas été défini...

Alternative

Propriété des médiatrices d'un triangle. Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est équidistant des trois sommets du triangle.

Démonstration.

Considérons un triangle ABC et ses médiatrices m_{AB} , m_{BC} , m_{AC} . Appelons P le point d'intersection de m_{AB} et de m_{BC} .

Puisque les points de la médiatrice d'un segment sont équidistants des extrémités de ce segment, on a

$$|PA| = |PB| \text{ et } |PB| = |PC|.$$

Dès lors,

$$|PA| = |PC|.$$

Comme les points équidistants des extrémités d'un segment appartiennent à la médiatrice de ce segment, on déduit que P appartient à m_{AC} .

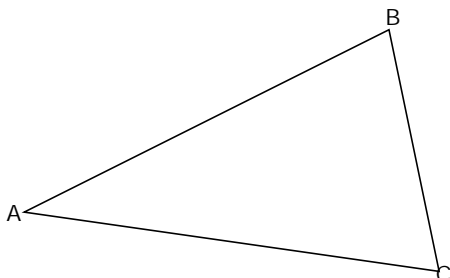
La troisième médiatrice est donc bien concourante aux deux premières. Leur point d'intersection est équidistant de A , B et C .

Cette démonstration est exprimée en grande partie en français. Les égalités sont intégrées dans des phrases. Les mots de liaison “dès lors” et “donc” indiquent clairement la logique de la démonstration. Les propriétés utilisées sont citées au bon moment, précédées de conjonctions telles que “comme” et “puisque”.

A propos de l'usage indispensable du français, et sur un sujet proche du précédent (les médiatrices d'un triangle et son cercle circonscrit), examinons un exemple des textes lacunaires, trop souvent employés actuellement par les auteurs de manuels.

Manuel [10]

Cercle circonscrit à un triangle



Le cercle circonscrit à un triangle doit comprendre les trois sommets du triangle. Son centre est donc situé à égale distance de A , B et C .

Les points équidistants de A et B appartiennent à la de $[AB]$. En effet, la d'un segment est l'ensemble de tous les points équidistants des extrémités de ce segment.

Trace cette droite.

Les points équidistants de A et C appartiennent à la de $[AC]$.

Trace cette droite.

Les points équidistants de B et C appartiennent à la de $[BC]$.

Trace cette droite.

Ces trois droites se coupent en un point qui est donc équidistant des trois sommets du triangle : c'est le centre du cercle circonscrit est [sic] l'intersection des trois de ce triangle.

Le rayon de ce cercle est la longueur des segments reliant ce point aux sommets du triangle.

Trace le cercle circonscrit au triangle.

Au lieu de provoquer une réelle recherche sur le sujet, les auteurs, à cet endroit, guident les élèves pas à pas. L'activité de ceux-ci consiste à deviner le bon terme à écrire (médiatrice) et à le copier cinq fois. Aucune justification ne leur est demandée. Aucune des compétences que l'on pourrait développer lors de l'élaboration d'une démonstration, telles que

- exposer et comparer ses arguments,
- s'exprimer dans un langage clair et précis,
- distinguer "ce dont on est sûr" de "ce qu'il faut justifier",
- raccrocher la situation à des objets mathématiques connus,

ne pourra être travaillée dans ce type d'activité, puisque tout le travail a été prémâché avant d'être présenté à l'élève.

Illustrons maintenant le même critère en examinant une synthèse concernant les transformations de graphes de fonctions en quatrième année du secondaire.

Manuel [11]

Le théorème QDPS des manipulations de fonctions

À partir de la fonction $f(x)$, on obtient le graphe de la fonction
 $a \cdot f(bx + h) + k$ ($a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}_0^+, h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$)

En quatre étapes comme suit :

Q. (Quotient) Diviser toute abscisse par b : $f(x) \rightarrow f(bx)$

D. (Différence) Retrancher h à toute abscisse : $f(x) \rightarrow f(bx + h)$

P. (Produit) Multiplier toute ordonnée par a : $f(x) \rightarrow a \cdot f(bx + h)$

S. (Somme) Ajouter k à toute ordonnée : $f(x) \rightarrow a \cdot f(bx + h) + k$.

Remarque :

Si $b < 0$, alors la fonction s'écrit $a \cdot f(-(b'x - h)) + k$ avec $b' = |b|$.

Que se cache-t-il sous cette suite de “trucs” ? Le titre parle d'un théorème...

En mettant de côté le problème du sens, qui est bien occulté dans cet extrait, remarquons l'absence de phrases bien construites et la ponctuation déficiente.

Alternative

Translations et compressions de graphes

1. Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphe de la fonction $y = f(x)$, celui de la fonction $y = f(x - m)$ est obtenu par translation parallèlement à l'axe Ox , dans le sens des x croissants si m est positif et dans le sens contraire si m est négatif, d'une longueur égale à $|m|$.

Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphe de la fonction $y = f(x)$, celui de la fonction $y = f(x) + n$ est obtenu par translation parallèlement à l'axe Oy , dans le sens des y croissants si n est positif et dans le sens contraire si n est négatif, d'une longueur égale à $|n|$.

2. Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphe de la fonction $y = f(x)$, celui de la fonction $y = f(r \cdot x)$ (r étant un réel strictement positif) est obtenu par compression d'axe Oy parallèlement à l'axe Ox et de rapport $\frac{1}{r}$.

Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphe de la fonction $y = f(x)$, celui de la fonction $y = s \cdot f(x)$ (s étant un réel strictement positif) est obtenu par compression d'axe Ox parallèlement à l'axe Oy et de rapport s .

3. Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphe de la fonction $y = f(x)$, celui de l'opposée, c'est-à-dire celui de la fonction $y = -f(x)$, est obtenu par symétrie orthogonale d'axe Ox .

Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphe de la fonction $y = f(x)$, celui de la fonction $y = f(-x)$, est obtenu par symétrie orthogonale d'axe Oy .

Contrairement à l'extrait précédent, cette synthèse donne clairement et dans un français correct, le lien entre certaines transformations de l'expression algébrique d'une fonction et les transformations de son graphe.

Un équilibre entre le sens et les automatismes

Illustrons ce critère en examinant l'introduction de l'algorithme de division écrite en 3^e année primaire.

Manuel [13]

Divisions : $648 : 2$

Une boîte d'aliment pour chien contient 648 g de viande.
Philippe et Yasmine la partagent en 2 repas équivalents.
Combien de grammes Basile recevra-t-il à chaque repas ?

$$648 : 2 = \dots\dots$$

C	D	U			
6	4	8	2		
-	6			3	
	0				

↓

$$\begin{aligned} 6 : 2 &= 3 \\ 3 \times 2 &= 6 \\ 6 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

C	D	U			
6	4	8	2		
-	6			3	2
	0	4			
	-	0	4		
			0		

↓

J'abaisse le 4 à côté du dernier reste

$$\begin{aligned} 4 : 2 &= 2 \\ 2 \times 2 &= 4 \\ 4 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

C	D	U			
6	4	8	2		
-	6			3	2
	0	4			
	-	0	4		
			0	8	3
			-	0	8
					x
					2
					=
					6
					4
					8

↓

J'abaisse le 8 à côté du dernier reste

$$\begin{aligned} 8 : 2 &= 4 \\ 4 \times 2 &= 8 \\ 8 - 8 &= 0 \end{aligned}$$

	C	D	U		
-	6	3	9	3	

P
R
E
U
V
E

	C	D	U		
-	8	4	2	2	

P
R
E
U
V
E

	C	D	U		
-	8	8	4	4	

P
R
E
U
V
E

$$668 : 2 = \dots\dots$$

	C	D	U		
-					

P
R
E
U
V
E

$$844 : 4 = \dots\dots$$

	C	D	U		
-					

P
R
E
U
V
E

$$486 : 2 = \dots\dots$$

	C	D	U		
-					

P
R
E
U
V
E

$$966 : 3 = \dots\dots$$

	C	D	U		
-					

P
R
E
U
V
E

$$609 : 3 = \dots\dots$$

	C	D	U		
-					

P
R
E
U
V
E

$$808 : 4 = \dots\dots$$

	C	D	U		
-					

P
R
E
U
V
E

On remarque que le procédé de division écrite est introduit sur un calcul ($648 : 2$) où il est inutile. Nul besoin de calcul écrit pour effectuer cette division. Les calculs

intermédiaires (multiplications, soustractions) ne sont pas nécessaires, mais sont imposés. Les auteurs visent probablement, lors de cette première séquence sur la division écrite, l'acquisition d'une disposition particulière. L'objectif de cette séquence est donc l'automatisation. Comment les élèves peuvent-ils comprendre dans ce contexte l'intérêt d'une telle disposition et de ces calculs intermédiaires, puisque ceux-ci compliquent le calcul à faire ?

Plusieurs manuels proposent une toute autre approche de ce procédé, trop longue pour que nous la retranscrivions ici. Résumons-la. Elle part d'un problème tel que : "Monsieur Mathieu est responsable de l'emballage d'ananas. Ceux-ci sont regroupés par cartons de 12. S'il y a 2 664 ananas, combien de cartons monsieur Mathieu doit-il prévoir?" Les enfants sont invités à inventer des stratégies pour trouver la réponse. À partir de leurs solutions ou de leurs idées et avec l'aide du professeur, ils élaborent une procédure qui consiste à soustraire de 2 664 des multiples "faciles" de 12... Après quelques étapes, la division écrite se présente comme une suite de soustractions répétées. Elle apparaît comme une procédure sensée qui facilite le calcul.

Notons encore qu'à l'heure de la calculatrice, l'habileté à appliquer le procédé de division écrite a un peu perdu de son importance. Quelles sont les raisons fondamentales de son étude ? Elle permet de travailler le sens de la division et d'exercer des compétences en numération. C'est donc le sens, plus encore que les automatismes, qui devrait être travaillé.

Une culture mathématique intégrée

Illustrons ce critère en examinant les liens qui sont faits ou non entre certaines parties de matière, ici des propriétés des diviseurs et multiples au premier degré du secondaire. Regardons d’abord ce qu’en disent les programmes.

Dans les programmes de l’enseignement officiel [12], on lit :

“Exploiter les deux propriétés suivantes :

- tout nombre qui divise deux autres nombres divise leur somme et leur différence,
- tout nombre qui divise un autre nombre divise aussi ses multiples.

On utilisera ces propriétés pour justifier certains critères de divisibilité (...)”

De même dans les programmes de l’enseignement catholique [4], on lit :

“(...) trois propriétés sont essentielles :

- (...)
- si un nombre divise un autre, alors il divise ses multiples,
- si un nombre divise deux autres, alors il divise leur somme et leur différence.

Ces propriétés permettent de justifier les caractères de divisibilité par 2, 5, 4, 25 et par 8 et 125.”

Manuel[2]

Retenir

1. Caractères de divisibilité

Un nombre est divisible par :

- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8
- 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5
- 10, 100, 1000, ... s’il se termine par 0, 00, 000, ...
- 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4
- 25 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 25
- (...)

2. Propriétés

Propriété 1 : Si un nombre en divise deux autres, alors il divise leur somme et leur différence.

Exemple 1. Si 7 divise 763 et 784, alors il divise aussi $1547 = 763 + 784$ et $21 = 784 - 763$.

Propriété 2 : Si un nombre divise un autre nombre, alors il divise aussi ses multiples.

Exemple 2. Si 7 divise 21, alors 7 divise aussi 42, 6384, ...

Ce manuel se contente d’énoncer les caractères de divisibilité sans justification, et les fait suivre de l’énoncé des propriétés qui devraient servir à les démontrer. Ces propriétés ne sont pas justifiées elles non plus.

PROPRIÉTÉS DES DIVISEURS ET DES MULTIPLES

(...)

Dans les propriétés qui suivent, les naturels sont supposés non nuls.

d. Un nombre qui en divise un autre, divise tous les multiples de cet autre.

EXEMPLE

On va démontrer que 3
divise 60 (multiple de 12)

3 divise 12,

car $12 = 3 \times 4$ Or $60 = 12 \times 5$

$$= (3 \times 4) \times 5$$

$$= 3 \times (4 \times 5)$$

$$= 3 \times 20$$

Donc 3 divise 60,

car $60 = 3 \times 20$

EN GÉNÉRAL

On donne les naturels a , b et n
tels que a divise b .Il faut démontrer que a divise bn Si a divise b , alors on peut trouver
un naturel c , tel que $b = ac$ Considérons un multiple de b ,
par exemple bn .Puisque $b = ac$, $bn = (ac)n$ ou $bn = a(cn)$ On peut donc dire que a divise bn ,
puisque'il existe un naturel cn tel
que $bn = a(cn)$

e. Un nombre qui en divise deux autres, divise leur somme.

(...)

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

a. Un nombre naturel est divisible par 2 si et seulement si son dernier chiffre forme un nombre divisible par 2.

EXEMPLE

Montrons que 374 est divisible par 2.

$$374 = 370 + 4$$

$$= 4$$

- 2 divise 10. car $10 = 2 \times 5$
- Donc 2 divise 370, propriété (d)
- 2 divise 4. car $4 = 2 \times 2$

Dès lors, par la propriété (e), 2 divise la somme de 370 et de 4, c'est-à-dire 374.

b. Un nombre naturel est divisible par 4 si et seulement si ses deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4.

(...)

Dans ce manuel, les propriétés de la divisibilité sont énoncées, leur preuve est illustrée sur un exemple générique, puis généralisée. Elles sont suivies des caractères de divisibilité, qui sont démontrés sur des exemples génériques à l'aide des propriétés précédentes.

En guise de conclusion :
un manuel peut être bon à certains égards et pas à d'autres.

Pour illustrer ce point, nous avons choisi la collection de manuels [14], qui propose une palette intéressante de problèmes de réflexion, certains pouvant être utilisés pour introduire une notion ou une théorie, d'autres étant plutôt des problèmes d'application, d'autres encore des problèmes ouverts.

Le problème choisi permet de travailler les droites remarquables du triangle, les quadrilatères et les isométries au premier degré du secondaire.

Dessine un triangle quelconque sur une feuille cartonnée.
Découpe-le et reporte-le au milieu d'une feuille blanche.
Construis ses droites remarquables en utilisant uniquement la règle (sans recours à sa graduation) et ton triangle cartonné.

Ce problème amène les élèves à se rendre compte des multiples figures que l'on peut obtenir en déplaçant le triangle. Ils sont amenés à échanger leurs procédés, à les justifier soit en utilisant des propriétés de figures simples, soit en utilisant les propriétés des isométries modélisant les mouvements effectués. Ils doivent de toute façon retrouver et affiner les images mentales qu'ils ont des droites remarquables et de leurs propriétés. Remarquons pourtant que la partie théorique de cette collection de manuels ne reprend que des définitions, des méthodes, des théorèmes, sans faire apparaître les liens que les problèmes contribuent à tisser et les argumentations nécessaires à la résolution de ces problèmes.

Cette collection vérifie les premiers critères cités (favoriser le développement de la pensée autonome, favoriser le débat, ...) et, de ce fait, mérite d'être connue et employée, mais présente une grande lacune au niveau de la structuration des connaissances.

Références

- [1] J. MAQUOI *et al.*, *Faire des maths en cinquième année*, Erasme, Namur, 2005.
- [2] R. DELORD, G. VINRICH, *Cinq sur cinq, Premier degré, Nombres*, Hachette - Erasme, 2003. Edition adaptée pour la Belgique.
- [3] P. ANCIA *et al.*, *Actimath 2*, Van In, Louvain-la-Neuve - Lier, 2000.
- [4] FÉDÉRATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE CATHOLIQUE, *Programme de mathématiques*, 1^{er} degré, 2000.
- [5] J.-M. DANIEL, CL.-A. HUGO, *Astro-math 2b*, Plantyn, Bruxelles, 2002.
- [6] A. ADAM *et al.*, *Espace Math 1*, De Boeck - Wesmael, Bruxelles, 2000.
- [7] F. VAN DIEREN-THOMAS *et al.*, *De question en question 1*, Didier Hatier, Bruxelles, 1993.
- [8] J.-M. DANIEL, CL.-A. HUGO, *Astro-math 2, boîte à outils*, Plantyn, Bruxelles, 2003.
- [9] J.-M. DANIEL, CL.-A. HUGO, *Astro-math 1b*, Plantyn, Bruxelles, 2003.
- [10] M. CHARLES *et al.*, *A vos math! 2* (1^{ère} partie), Plantyn, Bruxelles, 1995.
- [11] J.-M. DANIEL, V. DEMEZEL, *Astro-math 4*, Wolters Plantyn, Bruxelles, 2005.
- [12] MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE, ADMINISTRATION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE, *Programme d'études du cours de mathématiques*, 1^{er} degré commun, 2000.
- [13] PH. JONNAERT, F. BALABAN, *Basile et les maths 3b*, Plantyn, Bruxelles, 2003.
- [14] M. CHASTELLAIN *et al.*, *Géométrie*, Loisirs et Pédagogie, 2003.